ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ / Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	14 / 02 / 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

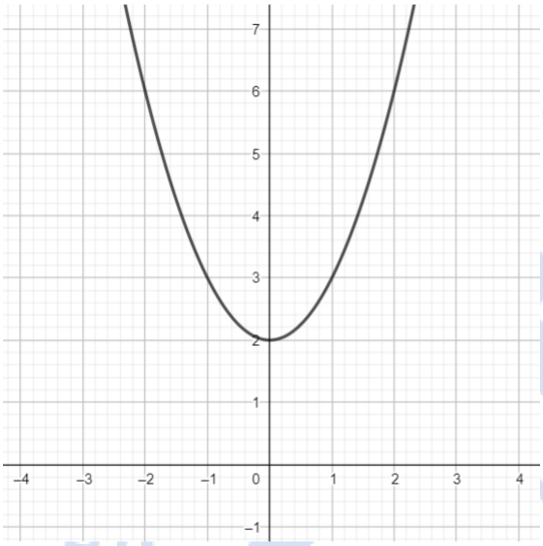
ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Σελ. 2 φροντ. **β.** Σελ. 60 φροντ.

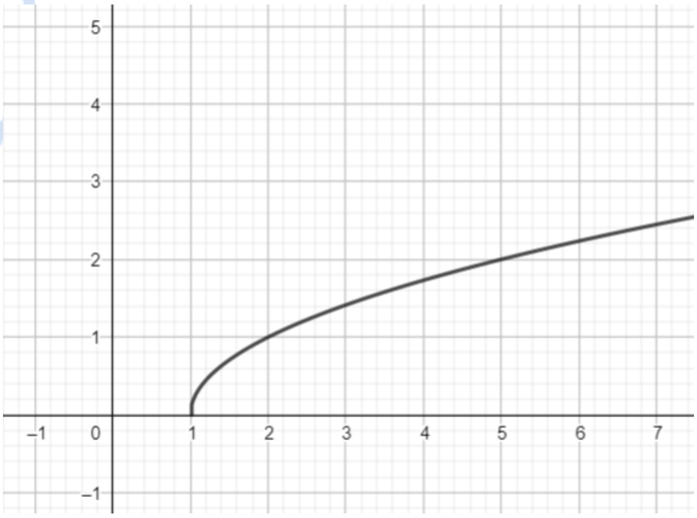
Α2. Σελ. 31 φροντ. Πεδίο ορισμού $f-g:\ A\bigcap B$ **,**

Πεδίο ορισμού $\frac{f}{g}: A\bigcap B-\left\{x\in R / g\left(x\right)=0\right\}$**.**

Α3. (i) $f(x)=x^2+2$



(ii) $f(x)=\sqrt{x-1}$



Α4. α) Λάθος, **β)** Λάθος, **γ)** Σωστό, **δ)** Λάθος, **ε)** Σωστό .

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει $x^2-1\neq 0$. Όμως έχουμε:

$x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ή $x+1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.

Άρα τελικά $x^2-1\neq 0$, όταν $x\neq 1$ και $x\neq -1$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Εφόσον η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y'y σε σημείο με τεταγμένη 4, θα είναι $f(0)=4 \Leftrightarrow \dfrac{0^2-3\cdot 0+\alpha}{0^2-1}=4 \Leftrightarrow -\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=-4$.

Β2. Για $\alpha=-4$ έχουμε $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}$. Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x'x, λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$. Άρα για κάθε $x\neq 1$ και $x\neq -1$, έχουμε:

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2-3x-4 είναι $\Delta=25$ και οι ρίζες του οι αριθμοί $x=-1$ και $x=4$.

Όμως το -1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $K(4,0)$.

Β3. Για να τέμνει η C_f την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y=1$, θα πρέπει η εξίσωση $f(x)=1$ να έχει λύση. Για κάθε $x\neq 1$ και $x\neq -1$, έχουμε λοιπόν:

$f(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}=1 \Leftrightarrow x^2-3x-4=x^2-1 \Leftrightarrow -3x-4=-1 \Leftrightarrow -3x=3$

$\Leftrightarrow x=-1$. Όμως το -1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Άρα η C_f δεν τέμνει την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y=1$.

Β4. Το πεδίο ορισμού της $g(x)=\dfrac{x-4}{x-1}$ είναι το $B=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Δηλαδή έχουμε διαφορετικά πεδία ορισμού για τις f και g, οπότε $f\neq g$.

Για κάθε $A\cap B=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ όμως έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x^2-1}=\frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-4}{x-1}=g(x).$$

Άρα στο $A=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$, είναι $f=g$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφόσον η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x’x σε σημείο με τετμημένη 1, θα πρέπει $f(1)=0$. Άρα έχουμε:

$f(1)=0 \Leftrightarrow 1^3+(3\alpha-1)\cdot 1+2\alpha^2-5=0 \Leftrightarrow 1+3\alpha-1+2\alpha^2-5=0 \Leftrightarrow 2\alpha^2+3\alpha-5=0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $2\alpha^2+3\alpha-5$ είναι $\Delta = 49$ και οι ρίζες του οι αριθμοί $\alpha = 1$ και $\alpha = -\frac{5}{2}$. Όμως το α είναι ακέραιος, οπότε $\alpha = 1$.

Γ2. (i) Για $\alpha = 1$, είναι $f(x)=x^3+2x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in\mathbb{R}$ έστω $x_1<x_2$. Τότε θα έχουμε:

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3$ (1) και $x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow 2x_1-3<2x_2-3$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει:

$x_1^3+2x_1-3<x_2^3+2x_2-3 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε και 1–1.

(ii) Κατόπιν σύγκρισης των αριθμών $-\frac{1}{2025}$ και $-\frac{1}{2026}$ και με την βοήθεια της μονοτονίας της f από το προηγούμενο ερώτημα, θα είναι:

$$2025<2026 \Leftrightarrow \frac{1}{2025}>\frac{1}{2026} \Leftrightarrow -\frac{1}{2025}<-\frac{1}{2026} \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(-\frac{1}{2025}\right)<f\left(-\frac{1}{2026}\right).$$

Γ3. Από το Γ1 γνωρίζουμε ότι $f(1)=0$. Με την βοήθεια της μονοτονίας της f θα έχουμε λοιπόν: $f(x^2-3)\le 0 \Leftrightarrow f(x^2-3)\le f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2-3\le 1 \Leftrightarrow x^2\le 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}\le\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow |x|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

Γ4. Το πεδίο ορισμού της $f(x)=x^3+2x-3$ είναι το $A=\mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού της $g(x)=\frac{1}{x+3}$ είναι το $B=(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$.

Η $g\circ f$ ορίζεται για εκείνα τα $x\in D_{g\circ f}$, όπου: $D_{g\circ f}=\{x\in A \text{ και } f(x)\in B\}$.

Άρα $D_{g\circ f}=\{x\in A \text{ και } f(x)\in B\}$

$\Leftrightarrow D_{g\circ f}=\{x\in R \text{ και } x^3+2x-3\in(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)\}$

$\Leftrightarrow D_{g\circ f}=\{x\in R \text{ και } x^3+2x-3\neq -3\}$

$\Leftrightarrow D_{g\circ f}=\{x\in R \text{ και } x(x^2+2)\neq 0\}$

$\overset{x^2+2\neq 0}{\Leftrightarrow} D_{g\circ f}=\{x\in R \text{ και } x\neq 0\}=(-\infty,0)\cup(0+\infty)$, και έχει τύπο $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\dfrac{1}{f(x)+3}=\dfrac{1}{x^3+2x-3+3}=\dfrac{1}{x^3+2x}$.

Έχουμε $(g\circ f)\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+2\cdot\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{8}+1}=\dfrac{1}{\dfrac{9}{8}}=\dfrac{8}{9}$.

Άρα η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $K\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{8}{9}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από την γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι οι προβολές των σημείων της καμπύλης πάνω στον άξονα x'x βρίσκονται μεταξύ των αριθμών –6 και 9, συμπεριλαμβανομένων αυτών. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=[-5,9]$.

Ομοίως οι προβολές των σημείων της καμπύλης πάνω στον άξονα y'y βρίσκονται μεταξύ των αριθμών -5 και $\dfrac{11}{2}$ συμπεριλαμβανομένων αυτών.

Άρα $f(A)=\left[-5,\dfrac{11}{2}\right]$.

Δ2. Το $f(0)$ αποτελεί την τεταγμένη που η C_f τέμνει τον άξονα y'y. Άρα $f(0)=-2$.

Εφόσον για $x=4$ η C_f τέμνει τον άξονα x'x, τότε $f(4)=0$. Άρα $f(f(4))=f(0)=-2$.

Δ3. **(i)** Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$, θα είναι το σύνολο των τετμημένων που η C_f τέμνει τον άξονα x'x. Από την γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι αυτό συμβαίνει για $x=-4$ και για $x=4$. Άρα $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-4$ ή $x=4$.

(ii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)\le -2$, είναι εκείνα τα διαστήματα των x για τα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από (ή τέμνει) την ευθεία $y=-2$.

Άρα $f(x)\le -2 \Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{7}{2},0\right]$.

Δ4. Το πλήθος ριζών της εξίσωσης , ταυτίζεται με το πλήθος των σημείων που η C_f τέμνει την οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y=\alpha$. Από την γραφική παράσταση συμπεραίνουμε ότι ανάλογα την τιμή του α το πλήθος αυτό αλλάζει.

(i) Αν $\alpha=\dfrac{13}{2}$, παρατηρούμε ότι η ευθεία αυτή είναι πιο πάνω από την C_f, οπότε το πλήθος ριζών της εξίσωσης είναι 0 (εναλλακτικά το α δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f άρα η εξίσωση είναι αδύνατη).

(ii) Αν $\alpha = \dfrac{2026}{2025}$, δηλαδή $\alpha \in \left(1, \dfrac{11}{2}\right)$, παρατηρούμε ότι η ευθεία αυτή είναι πιο πάνω από την y = 1, οπότε η εξίσωση έχει 1 ρίζα.

(iii) Αν $\alpha = \dfrac{2025}{2026}$, δηλαδή $\alpha \in (-5, 1]$, παρατηρούμε ότι η ευθεία αυτή είναι πιο κάτω από την y = 1, οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες.